ثانويّة شريّط لزهر – الحمّامات- تبسة- زايدي علاء الدين مجموعة الرياضيات لجزائرية2019

الإمتحان التدريبي الأول في مادة الرياضيات

المستوى: ثالثة علوم تجريبية — المدّة: 3ساعات

التّمرين الأول: (04 نقاط)

صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و كل الكرات متماثلة و غير متمايزة عند اللمس .
نجري سلسلة من السحبات : في كل سحبة نأخذ عشوائيا كرة من الكيس ، إذا كانت سوداء نتوقف عن السحب و إذا كانت بيضاء لا نعيدها إلى الكيس و نسحب كرة أخرى و هكذا .
أخرى و نسجل لونها و ننهي التجربة .

1) أ) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

A " الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء ".

B " الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء ".

ب) استنتج حساب الاحتمال لكي لا نجري السحبة الثالثة .

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد السحبات التي أجريناها.

أ) أعط قانون الاحتمال المتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي

ب) احسب التباين و الانحراف المعياري.

التّمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $u_{n+1}=\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4}$ و $u_0=3$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

2) أ- بين أن $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-3(u_n)^2+3}{3u_n+4}$.

ب- بين أن (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة .

3) نعتبر المتتالية $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $t_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

أ- تحقق أن $1-t_n=\dfrac{2}{u_n+1}$ ثم استنتج أن $1-t_n>0$

ب- بين أن $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\dfrac{1}{7}$ ثم عبر عن (t_n) بدلالة n و استنتج (u_n) بدلالة n

ج- عين $\lim\limits_{n\to+\infty}(t_n)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

د- أحسب الجداء $P_n=t_0\times t_1\times\dots\dots\times t_n$

التّمرين الثالث: (05 نقاط)

1) نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغيّر المركّب z المعرّف بـ $P(z)=z^3-15z^2+81z-175$.

أ) أحسُب $P(7)$ ثُمّ حلّل $P(z)$ إلى جداء عاملين.

ب) حل، في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$.

2) المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. نعتبر النّقط A، B و C التي لواحقها $z_A=4-3i$، $z_B=4+3i$ و $z_C=7$ على التّرتيب.

أ- علّم النّقط A، B و C.

ب- تحقّق أنّ $z_A-z_C=i\left(z_B-z_C\right)$.

ج) ما طبيعة المثلّث ABC؟

3) ليكن R الدّوران الذي مركزه النّقطة $\Omega(4)$ و يُحوّل النّقطة C إلى النّقطة B.

أ) أكتُب العبارة المركّبة للدّوران R.

ب) أوجد z_D لاحقة النّقطة D صورة النّقطة B بالدّوران R، ثُمّ علّمها.

ج) ما طبيعة الرّباعي $ACBD$؟

4) لتكن (Ψ) مجموعة النّقط M، ذات اللاّحقة z، من المستوي المركّب حيثُ يكون $\dfrac{z-z_B}{z-z_C}$ تخيّليّاً صرفاً جزؤه التّخيّلي موجب.

أ) حدّد طبيعة (Ψ).

ب) أنشئ (Γ) صورة (Ψ) بالدّوران R.

التّمرين الرابع: (07 نقاط)

الجدول التالي يمثل جدول تغيرات الدالة h المعرفة $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=x^3-x^2-x-1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

1- أحسب $h(1.84)$ (تعطى النتيجة مدورة إلى 10^{-2})

2- استنتج اشارة $h(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x

I. لتكن g دالّة عدديّة مُعرّفة على المجال $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ $g(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}+\ln(x^2-1)$.

1) أحسُب نهايات الدّالّة g بجوار أطراف مجموعة تعريفها.

2) بين أنّه من أجل كل x من المجال $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ أن $g'(x)=\dfrac{2}{\left(x^2-1\right)^2}h(x)$. ثم استنتج اتجاه تغيُّر الدّالّة g، ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-2.11<\alpha<-2.10$

4) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II. لتكن f دالّة عدديّة مُعرّفة على $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ بـ $f(x)=e^x\ln(x^2-1)$

و ليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي. (الوحدة على محور الفواصل $1cm$ وعلى محور التراتيب $6cm$)

1) أحسُب نهايات الدّالّة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسيا .

2) أثبت أن $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغيُّر الدّالّة f ، ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

3) إثبت أن $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha e^{\alpha}}{1-\alpha^2}$. ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$

4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين β و λ حيث $-1.42 < \beta < -1.41$ و $1.41 < \lambda < 1.42$

5) أنشئ $\left(C_f\right)$

6) ناقش، بيانيّاً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x، حيثُ

$$\ln(x^2 - 1) - e^{-x}(m - 1) = 0$$

زايدي علاء الدين

الإجابة النموذجية

التّمرين الثاني: (04 نقاط) اختياري

1) أ) $P(A)=\frac{C_4^1}{C_7^1}=\boxed{\frac{4}{7}}$

لكي يتحقق الحدث يجب :

أن نسحب في المرة الأولى كرة بيضاء و لا تعاد إلى الكيس $\boxed{\text{و}}$ نسحب في المرة الثانية كرة سوداء

إذن : $P(B)=\frac{C_3^1}{C_7^1}\times\frac{C_4^1}{C_6^1}=\boxed{\frac{2}{7}}$

ب) لكي لا نجري السحبة الثانية يجب أن نتوقف إما عند السحبة الأولى $\boxed{\text{أو}}$ عند السحبة الثانية

أي : " نسحب كرة سوداء في المرة الأولى $\boxed{\text{أو}}$ نسحب كرة سوداء في المرة الثانية".

إذن الاحتمال لكي لا نجري السحبة الثالثة هو : $P(A)+P(B)=\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\boxed{\frac{6}{7}}$

2) القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 1 و 2 و 3 و 4 .

- يتحقق الحدث $(X=1)$ إذا سحبنا في المرة الأولى كرة سوداء : $P(X=1)=P(A)=\boxed{\frac{4}{7}}$

- يتحقق الحدث $(X=2)$ إذا سحبنا في المرة الأولى كرة بيضاء و لم نعدها إلى الكيس ثم سحبنا كرة سوداء

إذن : $P(X=2)=P(B)=\boxed{\frac{2}{7}}$

- يتحقق الحدث $(X=3)$ إذا سحبنا في المرة الأولى كرة بيضاء و لم نعدها إلى الكيس ثم سحبنا في المرة الثانية كرة بيضاء و لم نعدها إلى الكيس ثم سحبنا في المرة الثالثة كرة سوداء.

إذن : $P(X=3)=\frac{C_3^1}{C_7^1}\times\frac{C_2^1}{C_6^1}\times\frac{C_4^1}{C_5^1}=\boxed{\frac{4}{35}}$

- يتحقق الحدث $(X=4)$ إذا سحبنا في المرة الأولى كرة بيضاء و لم نعدها إلى الكيس ثم سحبنا في المرة الثانيةكرة بيضاء و لم نعدها إلى الكيس ثم سحبنا في المرة الثالثة كرة بيضاء و لم نعدها إلى الكيس ثم سحبنا في المرة الرابعة كرة سوداء

إذن :

$$P(X=4)=\frac{C_3^1}{C_7^1}\times\frac{C_2^1}{C_6^1}\times\frac{C_1^1}{C_5^1}\times\frac{C_4^1}{C_4^1}=\boxed{\frac{1}{35}}$$

- نلخص النتائج في الجدول التالي :

X_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$

✓ ـ الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{4}{7}+3\times\frac{4}{35}+4\times\frac{1}{35}=\boxed{\frac{76}{35}}$$

✓ التباين $V(X)$:

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\left(1\times\frac{4}{7}+4\times\frac{2}{7}+9\times\frac{4}{35}+16\times\frac{1}{35}\right)-\left(\frac{76}{35}\right)^2=\frac{112}{35}-\frac{5776}{1225}=\frac{1506}{1225}$$

✓ الانحراف المعياري $\sigma(X)$:

$.\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\approx 3,50$

التّمرين الثاني: (04 نقاط)

المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $u_{n+1}=\frac{4u_n+3}{3u_n+4}$ و $u_0=3$

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n>1$.

الشرط الأوّل

لنتأكد من صحة $P(0)$ لدينا $u_0=3$ تكافئ: $u_0>1$ ومنه $P(0)$ صحيحة.

الشرط الثاني

لنفرض أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}>1$

حسب فرضية التراجع $u_n>1$ نلاحظ أن $u_{n+1}=\frac{4u_n+3}{3u_n+4}=f(u_n)$

تكافئ: $f(u_n)>f(1)$ و تكافئ $u_{n+1}>1$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة. $P(n)$ و منه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه ن أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n>1$.

4) أ- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$.u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n+3}{3u_n+4}-u_n=\frac{4u_n+3-3(u_n)^2-4u_n}{3u_n+4}=\frac{-3(u_n)^2+3}{3u_n+4}$$

ب- بين أن (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة

من البرهان بالتراجع لدينا $u_n>1$ ومن جهة أخرى $3u_n+4>0$ فالإشارة من إشارة البسط، أي أن $-3(u_n)^2+3=0$ تكافئ $u_n=1$ أو $u_n=-1$ ومن جهة أخرى $u_n>1$ أي أن (u_n) متناقصة.

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو 1.

3) $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ- التحقق أن $1 - t_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$: من أجل كل عدد طبيعي n :

$$1 - t_n = 1 - \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{u_n + 1 - u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{2}{u_n + 1}$$

الاستنتاج أن $1 - t_n > 0$ من البرهان بالتراجع لدينا $u_n > 1$ تكافئ $u_n + 1 > 0$ تكافئ

$$\frac{2}{u_n + 1} > 0$$

ب- $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ معناه أن $t_{n+1} = \frac{1}{7} t_n$

لدينا $t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ تكافئ

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\dfrac{4u_n + 3}{3u_n + 4} - 1}{\dfrac{4u_n + 3}{3u_n + 4} + 1} = \frac{\dfrac{4u_n + 3 - 3u_n - 4}{3u_n + 4}}{\dfrac{4u_n + 3 + 3u_n + 4}{3u_n + 4}} = \frac{u_{n-} - 1}{7u_n + 7} = \frac{1}{7}\left(\frac{u_{n-} - 1}{u_n + 1}\right) = \frac{1}{7} t_n$$

ومنه (t_n) هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و حدها الأول $t_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{1}{2}$

عبارة t_n بدلالة n: $t_n = t_0 \times q^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^n$

عبارة u_n بدلالة n: لدينا $t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ تكافئ $t_n(u_n + 1) = u_n - 1$ تكافئ $t_n(u_n + 1) - u_n + 1 = 0$

تكافئ $t_n u_n + t_n - u_n + 1 = 0$ تكافئ $u_n(t_n - 1) + t + 1 = 0$ تكافئ $u_n = \dfrac{t_n + 1}{-t_n + 1}$ تكافئ

$$u_n = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^n + 1}{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^n + 1}$$

ج- $\lim\limits_{n\to+\infty}(t_n) = 0$ لأن $-1 < q < 1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 1$.

د- حساب الجداء $P_n = t_0 \times t_1 \times ....\times t_n = t_0\left(\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{7}}\right) = \dfrac{7}{12}\left(1 - \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}\right)$

التّمرين الثالث: (05 نقاط)

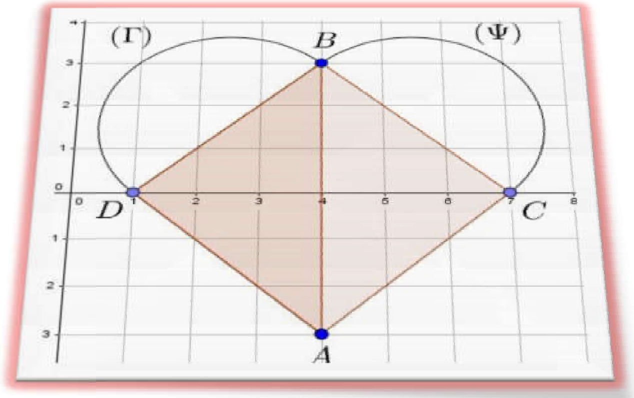
1) أ) لدينا $P(7) = 0$ ، باستخدام خوارزميّة القسمة الإقليدية نجد أنّ $P(z) = (z - 7)(z^2 - 8z + 25)$.

ب) لدينا $P(z) = 0$ يكافئ $(z - 7)(z^2 - 8z + 25) = 0$ يكافئ $\begin{cases} z - 7 = 0...............(1) \\ z^2 - 8z + 25 = 0....(2) \end{cases}$

من المعادلة (1) نجد أنّ $z=7$.

المعادلة (2) من الدّرجة الثانية، نحلّها باستخدام المميّز Δ حيثُ $\Delta=-36$، إذن فهي تقبل حلّين مترافقين هما $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=4-3i$ و $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=4+3i$، و عليه مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي $S=\{1,4-3i,4+3i\}$.

2) أ) التّعليم موضّح في الرّسم المرفق.



ب) لدينا من جهة $z_A-z_C=-3-3i$ و من جهة أخرى $-i(z_B-z_C)=-3-3i$ إذن $z_A-z_C=-i(z_B-z_C)$.

ج) لدينا $z_A-z_C=i(z_B-z_C)$ و منه $\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=i$، كذلك لدينا $\left|\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=|i|=1$ أي أنّ $AC=BC$، كذلك لدينا $\arg\left(\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)=\arg(i)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$، و منه $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$، و عليه يكون المثلّث ABC قائم في C و متقايس السّاقين.

3) أ) العبارة المركّبة للدّوران R من الشكل $z'=az+b$.

لدينا $\begin{cases} z_\Omega=az_\Omega+b\ldots.(1)\\ z_B=az_C+b\ldots.(2)\end{cases}$، بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نحصل على $z_B-z_\Omega=a(z_C-z_\Omega)$ و منه $a=i$ إذن $b=4-4i$، و عليه العبارة المركّبة للدّوران R هي $z'=iz+4-4i$.

ب) لدينا $z_D=iz_B+4-4i$ و منه $z_D=7$.

ج) المثلّث ABC قائم في C و متقايس السّاقين و $z_D-z_B=z_A-z_C$ أي $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}$ إذن الرّباعي $ACBD$ مربّع.

4) أ) العدد $\dfrac{z-z_B}{z-z_C}$ تخيّلي صرف جزؤه التّخيّلي موجب يعني أنّ $\arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_C}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ أي أنّ $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$، و عليه (Ψ) هي نصف دائرة قطرها $[BC]$ باستثناء النّقطتين B و C و الزّاوية $\widehat{MBC}$ موجّهة في الاتجاه الموجب.

التّمرين الرابع: (07 نقاط)

I. الجزء الأول:

1- لدينا $h(1.84)=0$ (النتيجة مدورة إلى 10^{-2})

2- اشارة $h(x)$ موضحة في الجدول

x	$-\infty$		$1,84$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

II. الجزء الثاني:

لتكن g دالّة عدديّة مُعرّفة على المجال $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ $g(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}+\ln(x^2-1)$.

1) حساب نهايات الدّالّة g بجوار أطراف مجموعة تعريفها.

نهاية الدّالّة g بجوار $-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2-1}+\ln(x^2-1)=+\infty$

نهايةالدّالّة g بجوار $+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2-1}+\ln(x^2-1)=+\infty$

نهاية الدّالّة g بجوار -1 $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\dfrac{2x+(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2-1}=-\infty$

نهاية الدّالّة g بجوار 1 $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\dfrac{2x+(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2-1}=+\infty$

1) الدّالّة g قابلة للإشتقاق على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ والدّالّة المشتقّة

$$g'(x)=\frac{2\left(x^2-1\right)-2x(2x)}{\left(x^2-1\right)^2}+\frac{2x}{\left(x^2-1\right)}=\frac{2\left(x^3-x^2-x-1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2}{\left(x^2-1\right)^2}h(x).$$

و بما ان $\dfrac{2}{\left(x^2-1\right)^2}>0$ من أجل كل x من المجال $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $h(x)$

ومنه. الدّالّة g متزايدة تماماً على $]1,82;+\infty[$ و متناقصة تماماً على $]-\infty;-1[\cup]1,;1,82[$.وجدول تغيُّراتها هو :

x	$-\infty$		-1		1		$1,82$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$				$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	$2,91$	$\nearrow$	$+\infty$

3) الدّالّة g مستمرّة و رتيبة تماماً متناقصة تماما على المجال $]-2,11;-2,10[$، و لدينا $g(-2,11)\times g(-2,10)<0$، و منه حسب مبرهنة القيم المتوسّطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α، حيثُ $-2,11<\alpha<-2,10$.

4) إشارة $g(x)$ مُوضّحة في الجدول.

x	$-\infty$		α		-1		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	//////	//////	//////	$+$	

III. لتكن f دالّة عدديّة مُعرّفة على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ بـ $f(x)=e^x\ln(x^2-1)$

1) حساب نهايات الدّالّة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها.وتفسير النتائج هندسيا .

نهاية الدّالّة f بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x\ln(x^2-1)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-1)e^x\times\frac{\ln(x^2-1)}{(x^2-1)}=0$$

المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مستقيممقارب أفقي للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

نهايةالدّالّة f بجوار $+\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x\ln(x^2-1)=+\infty$

نهاية الدّالّة f بجوار -1 $\lim_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-1} e^x\ln(x^2-1)=-\infty$

المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مستقيم مقارب عمودي للمنحني (C_f).

نهاية الدّالّة f بجوار 1 $\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1} e^x\ln(x^2-1)=-\infty$

المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مستقيم مقارب عمودي للمنحني (C_f).

2) الدّالّة g قابلة للإشتقاق على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ ودالّتها المشتقّة $f'(x)=g(x)\times e^x$ و بما ان $e^x>0$ من أجل كل x من المجال $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.ومنه الدّالّة f متزايدة تماماً على $]-\infty;\alpha[\cup]1;+\infty[$ و متناقصة تماماً على $]\alpha;-1[$.وجدول تغيُّراتها هو

x	-2		α		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	//////	//////	//////	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$	//////	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $\ln(\alpha^2-1)=-\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}$ ومنهاإثبت أن $f(\alpha)=e^\alpha\ln(\alpha^2-1)=\frac{2\alpha e^\alpha}{1-\alpha^2}$

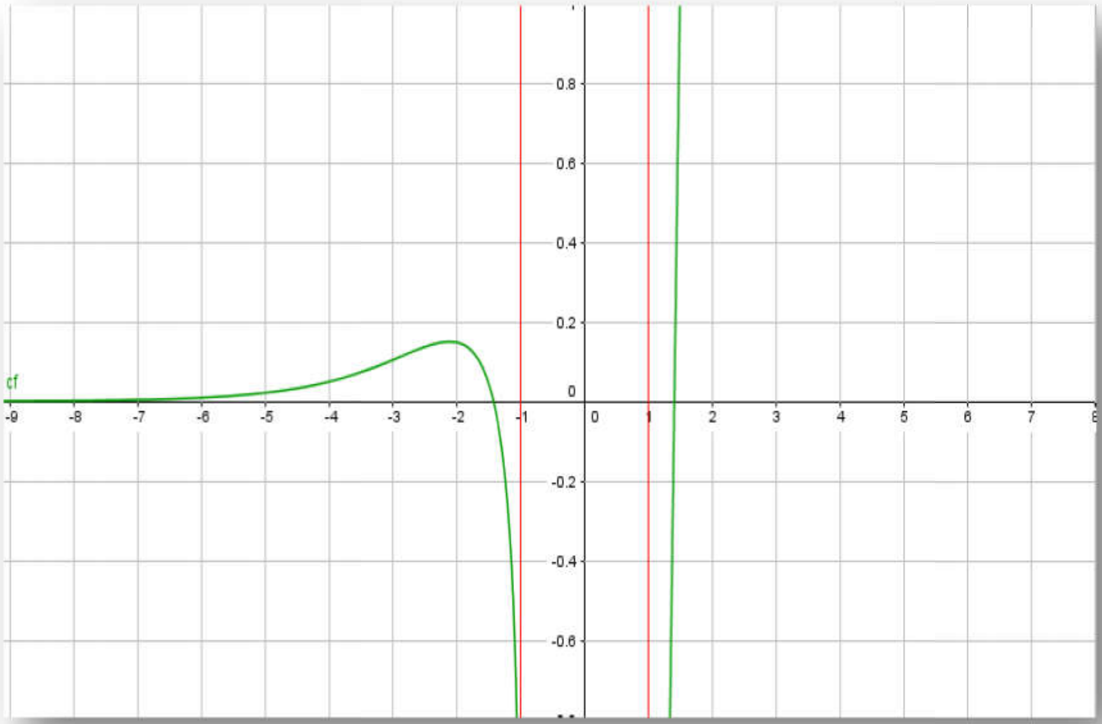
حصرا لـ $f(\alpha)$ لدينا $-2,11<\alpha<-2,10$ ومنه $-4,22<2\alpha<-4,20$ وكذلك $0,121<e^\alpha<0,122$ وكذلك $-0,508<2\alpha e^\alpha<-0,514$ ومن جهة أخرى $4,41<\alpha^2<4,45$ ومنه $-3,45<1-\alpha^2<-3,41$ ومنه $\frac{1}{-3,45}<\frac{1}{1-\alpha^2}<\frac{1}{-3,41}$

$0,146<f(\alpha)<0.151$

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين β و λ حيث $-1.42<\beta<-1.41$ و $1.41<\lambda<1.42$ الدّالّة f مستمرّة و رتيبة تماماً متناقصة تماما على المجال $]-1,42;-1,41[$، و لدينا $f(-1,41)\times f(-1,42)<0$، و منه حسب مبرهنة القيم المتوسّطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β، حيثُ $-1.42<\beta<-1.41$.

5) الدّالّة f مستمرّة و رتيبة تماماً متزايدة تماما على المجال $]1,41;1,42[$، و لدينا $f(1,41)\times f(1,42)<0$، و منه حسب مبرهنة القيم المتوسّطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا λ، حيثُ $1.41<\lambda<1.42$.

5) أنشئ $\left(C_f\right)$



6) المناقشة بيانيّاً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x، حيثُ $\ln(x^2-1)-e^{-x}(m-1)=0$ يكافئ $\ln(x^2-1)=e^{-x}(m-1)$ يكافئ $e^x\times\ln(x^2-1)=e^x\times e^{-x}(m-1)$ يكافئ $e^x\ln(x^2-1)=(m-1)$ يكافئ $f(x)=(m-1)$ ، مناقشة أفقية هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم المتحرك الأفقي ذو المعادلة $y=m-1$

- $m-1<0$ تكافئ $m<1$ حلين مختلفين أحدهما موجب و الأخر سالب
- $m-1=0$ تكافئ $m=1$ حلين مختلفين أحدهما β و الأخر λ.
- $0<m-1<f(\alpha)$ تكافئ $1<m<f(\alpha)+1$ حلين سالبين وحل موجب.
- $m-1=f(\alpha)$ تكافئ $m=f(\alpha)+1$ حل مضاعف سالب وحل موجب.
- $m-1>f(\alpha)$ تكافئ $m>f(\alpha)+1$ حل موجب.

بالتوفيق في شهادة البكالوريا 2019

زايدي علاء الدين

الإمتحان التدريبي الثاني في مادّة الرياضيات

المستوى: ثالثة الشعب العلمية　　　　المدّة: 3ساعات

التّمرين الأوّل:(04 نقاط)اختياري

يحتوي صندوق على 10 كرات منها 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و كريتان بيضاء ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربعة كرات من الصندوق .

5) أحسُب عدد الحالات الممكنة

6) احسب الاحتمالات التالية:

أ) ثلاث كرات من نفس اللون

ب) كرة على الأقل بيضاء

ت) كرتين على الأكثر خضراء .

7) نعتبر الحدث A : "من بين الكرات الأربعة المسحوبة توجد كرة بيضاء واحدة فقط"

نعتبر الحدث B : "من بين الكرات الأربعة المسحوبة توجد بالضبط ثلاث كرات من نفس اللون "

بين أن $p(A)=\frac{8}{15}$ و أن $p(B)=\frac{19}{70}$.

8) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات البيضاء المسحوبة .

أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون الإحتمال له.

ب) أحسب الأمل الرياضياتي و التباين والإنحراف المعياري.

التّمرين الثاني:(04 نقاط) اجباري

لتكن h دالّة عدديّة مُعرّفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ $h(x)=\frac{4x-1}{x+2}$. و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي. (أنظر الملحق) و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

1) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $u_{n+1}=\frac{4u_n-1}{u_n+2}$ و $u_0=5$

أ- مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية وتقاربها (u_n)

2) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

ب-أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $v_n=\frac{1}{u_n-1}$

ه- بين أن (v_n) حسابية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

و- عبر عن (v_n) بدلالة n ثم استنتج (u_n) بدلالة n. عين $\lim_{n\to+\infty}(v_n)$ و $\lim_{n\to+\infty}(u_n)$.

4) أحسب الجداء $P_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times e^{v_2}\times......\times e^{v_n}$

التّمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$

1) لتكن النقطة M' ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاحقة z بالدوران R الذي مركزه Ω ذات اللاحقة z_w و زاويته θ بحيث $\Omega M = \Omega M'$ و $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}) = \theta + 2k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$.

أ- عين طويلة وعمدة العدد المركب $\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}$

ب- أكتب z' بدلالة z و θ و z_w .

2) حل، في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$، المعادلة $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$

3) نعتبر النّقط A، B التي لواحقها $z_A = 2\sqrt{3} - 2i$ ، $z_B = 2\sqrt{3} + 2i$ على التّرتيب.

أ- أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي

ب- بين أن المثلث OAB متقايس الأضلاع

4) لتكن النقطة C ذات اللاحقة $z_C = -8i$ والنقطة D صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{2\pi}{3}$.

ج- علّم النّقط A، B، C و D.

د- تحقق أن لاحقة النقطة D هي $z_D = 4\sqrt{3} + 4i$

ه- بين أن النقطة D صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه O ثم بين أن المثلث OAD قائم في A

التّمرين الرابع: (07 نقاط)

I. لتكن g دالّة عدديّة مُعرّفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ $g(x) = e + \dfrac{\ln x}{x}$. و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2- حل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلة $g(x) = e$

3- أحسب $g\left(\dfrac{1}{e}\right)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

I. نعتبر f الدالّة العدديّة المُعرّفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + ex + e$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

1) أُحسُب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ فسِّر هندسيّاً النّتائج.

2) أ- بين أنّه من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$ أن $f'(x) = g(x)$.

ب - استنتج اتجاه تغيُّر الدّالّة f ، ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

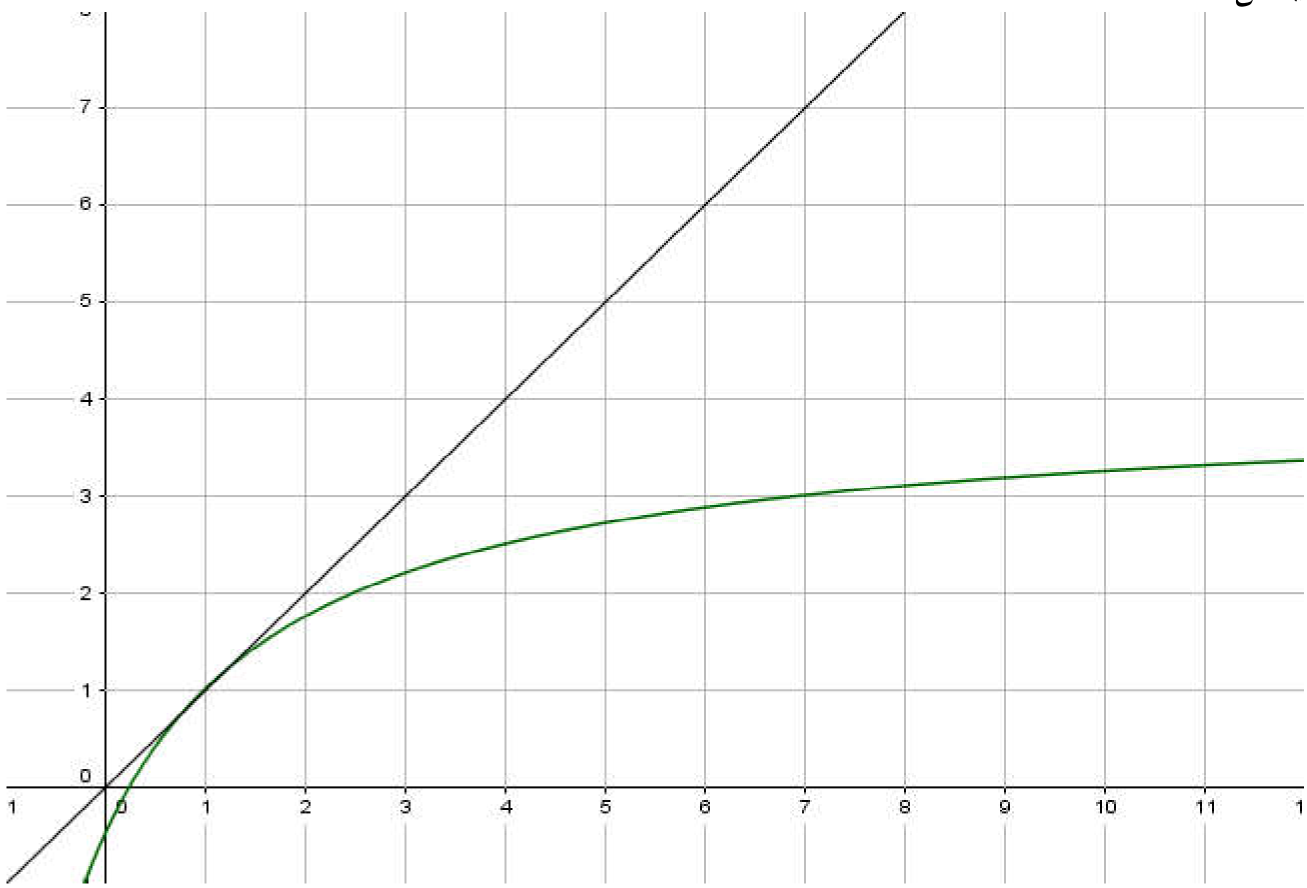
3) عين معدلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 1. ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

4) أنشئ (Δ) و (C_f).

5) ناقش، بيانيّاً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x، حيثُ $(\ln x)^2 - 2x(m - e) = 0$

زايدي علاء الدين

الملحق



بالتوفيق في شهادة البكالوريا 2019

الإجابة النموذجية

التّمرين الأول: (04 نقاط)

1- الحالات اللمكنة لسحب 4 كرات في أن واحد هي : $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4!(10-4)!} = 210$

2- -أ- D حادثة الحصول على " ثلاث كرات من نفس اللون " معناه 3 كرات حمراء وكرة لون اخر أو 3 كرات خضراء وكرة لون اخر

$$P(D) = \frac{C_5^3 \times C_5^1 + C_3^3 \times C_7^1}{210} = \frac{1\times 7 + 10\times 5}{210} = \frac{57}{210} = \frac{19}{70}$$

E حادثة الحصول على "كرة على الأقل بيضاء" معناه كرة بيضاء و 3 كرات لون اخر أو كرتين بيضاء و كرتين لون اخر = $P(E) = \dfrac{C_2^1 \times C_8^3 + C_2^2 \times C_8^2}{56}$

F حادثة الحصول على "كرتين على الأكثر خضراء" معناه كرتين خضراء و كرتين لون اخر أو كرة خضراء وثلاث كرات لون اخر أو 4 كرات لون اخر. = $P(F) = \dfrac{C_3^2 \times C_7^2 + C_3^1 \times C_7^3 + C_3^0 \times C_7^4}{56}$

3- نعتبر الحدث A : "من بين الكرات الأربعة المسحوبة توجد كرة بيضاء واحدة فقط"

معناه كرة بيضاء واحدة و ثلاث كرات لون اخر $p(A) = \dfrac{C_8^3 \times C_2^1}{210} = \dfrac{112}{210} = \dfrac{8}{15}$

نعتبر الحدث B : "من بين الكرات الأربعة المسحوبة توجد بالضبط ثلاث كرات من نفس اللون "

معناه 3 كرات حمراء وكرة لون اخر أو 3 كرات خضراء وكرة لون اخر

$p(B) = p(D) = \dfrac{19}{70}$.

4- تعيين قيم X : $X = \{0,1;2\}$

$P(X=0) = \dfrac{C_8^4}{210} = \dfrac{1}{3}$ في حالة سحب 4 كرات غير بيضاء

$P(X=1) = P(A) = \dfrac{8}{15}$ في حالة سحب كرة بيضاء و 3 كرات غير بيضاء

استنتاج : $P(X=2) = ?$ أو يمكن حسابها بنفس الطريقة السابقة أي كرتين بيضاء و كرتين ليست بيضاء

لدينا : $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$

$$P\left(X=2\right)=1-\left(P\left(X=1\right)P\left(X=3\right)\right)$$

$$P\left(X=2\right)=\frac{2}{15}$$

X_i	0	1	2
$P\left(X=x_i\right)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

ج -حساب الامل الرياضي و التباين والانحراف المعياري :

$$E\left(X\right)=\left(0\times\frac{1}{3}\right)+\left(1\times\frac{8}{15}\right)+\left(2\times\frac{1}{15}\right)=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$$

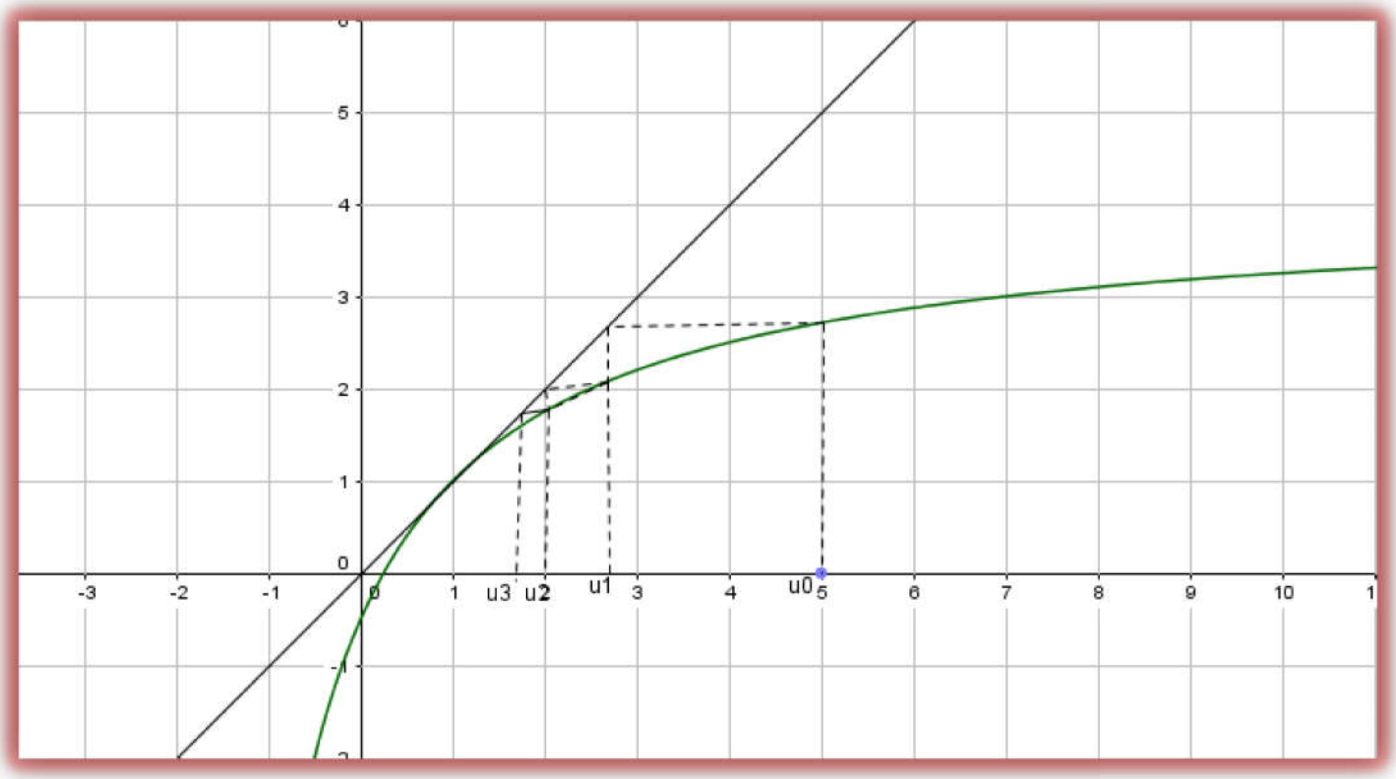
ت-حساب التباين والانحراف المعياري :

$$v\left(X\right)=\sum_{i=1}^{3}\left(X_i-E\left(X\right)\right)^2\times P_i=\frac{96}{225}$$

الانحراف المعياري : $\delta=\sqrt{V\left(X\right)}=0,65$

التّمرين الثاني:(04 نقاط)

1- أ- تمثيل الحدود u_0,u_1,u_2,u_3 على حامل محور الفواصل



ب- التخمين $u_0<u_1<u_2<u_3$ إذن من الواضح أن المتتالية u_n متناقصة تماما

بما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو نقطة تقاطع .

نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $u_{n+1}=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}$ **و** $u_0=5$

5) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

الشرط الأوّل

لنتأكد من صحة $P(0)$ لدينا $u_0 = 5$ تكافئ : $u_0 > 1$ ومنه $P(0)$ صحيحة.

الشرط الثاني

لنفرض أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} > 1$

حسب فرضية التراجع $u_n > 1$ نلاحظ أن $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} = f(u_n)$

تكافئ: $f(u_n) > f(1)$ **و تكافئ** $u_{n+1} > 1$ **ومنه $P(n+1)$ صحيحة. $P(n)$ و منه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه ن أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.**

ب-أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - 1 - (u_n)^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{-(u_n)^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2}$$

نلاحظ أن $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2} < 0$ **المتتالية u_n متناقصة تماما .**

3) **نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة ب:** $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

أ- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **حسابية معناه أن** $v_{n+1} - v_n = r$

لدينا $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ **تكافئ** $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{3u_n + 4}} = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 2 - 3}{3u_n - 3} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n - 1}{u_n - 1}\right) = \frac{1}{3}$$

ومنه (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{4}$

ب- عبارة v_n بدلالة n: $v_n = v_0 + nr = \frac{1}{4} + (\frac{1}{7})n$

استنتج (u_n) بدلالة n لدينا : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ **تكافئ** $v_n(u_n - 1) = 1$ **تكافئ**

$$u_n = \frac{1 + v_n}{v_n} = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{4} + (\frac{1}{7})n} + 1 = \frac{28}{4n + 7} + 1$$

تعين $\lim_{n\to+\infty}(v_n) = +\infty$ **و** $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 1$.

4) حساب الجداء $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times ...... \times e^{v_n} = e^{v_0+v_1+....+v_n} = e^{\frac{(n+1)}{2}(v_0+v_n)}$

التّمرين الثالث: (05 نقاط)

1) أ- بما أن $\Omega M = \Omega M'$ فإن $\left|z' - z_\Omega\right| = \left|z - z_\Omega\right|$ ومنه $\left|\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right| = 1$

كذلك $\arg\left(\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta + 2k\pi$

ب- لدينا $\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = \left|\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right| e^{i\theta}$ ومنه $\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = e^{i\theta}$ ومنه $z' = e^{i\theta} z + \left(1 - e^{i\theta}\right) z_\Omega$

2) أ) المعادلة من الدّرجة الثانية، نحلّها باستخدام المميّز Δ حيث $\Delta = -16 = 16i^2$، إذن فهي تقبل حلّين مترافقين هما $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 2\sqrt{3} - 2i$ و $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 2\sqrt{3} + 2i$، و عليه مجموعة حلول المعادلة هي $S = \left\{2\sqrt{3} - 2i, 2\sqrt{3} + 2i\right\}$

3) أ) لدينا $\left|z_1\right| = \left|z_2\right| = 4$ ومنه الشكل الأسي للعدد z_A هو $z_A = 4e^{\frac{\pi}{6}i}$ و بما أن $z_A = \overline{z_B}$ فإن $z_B = 4e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

ب) لدينا $\dfrac{z_A - z_O}{z_B - z_0} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ و عليه يكون المثلّث OAB متقايس الأضلاع.

4) أ)التمثيل موضح في الرسم .

ب) لدينا $z_D = e^{\frac{2\pi}{3}i} z_C = 4\sqrt{3} + 4i$

ج) لدينا $z_D = e^{\frac{2\pi}{3}i} z_C = 4\sqrt{3} + 4i = 2z_B$ و منه النقطة D صورة النقطة B بالتحاكي الذي O مركزه ونسبته 2

د) لدينا $\dfrac{z_O - z_A}{z_D - z_A} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{\pi}{2}i}$ و هو عدد تخيلي صرف و عليه يكون المثلّث OAD قائم في A .

التّمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول:

1- لدينا g دالّة عدديّة مُعرّفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ $g(x) = e + \dfrac{\ln x}{x}$

حساب نهايات الدّالّة g بجوار أطراف مجموعة تعريفها.

نهاية الدّالّة g بجوار $+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=e$

نهاية الدّالّة g بجوار 0 $\lim\limits_{x\to0} g(x)=-\infty$

الدّالّة g قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ودالّتها المشتقّة هي :

$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

ومنه الدّالّة g متزايدة تماماً على $]0;e[$ و متناقصة تماماً على $]e;+\infty[$. وجدول تغيُّراتها هو :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1+e^2}{e}$	$\searrow$	e

2) حل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلة $g(x)=e$ يكافئ $x=1$

3) أحسب $g\left(\frac{1}{e}\right)=0$ و منه اشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II. نعتبر f الدالّة العدديّة المُعرّفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+ex+e$

1) حساب نهايات الدّالّة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. و تفسير النتائج هندسيا .

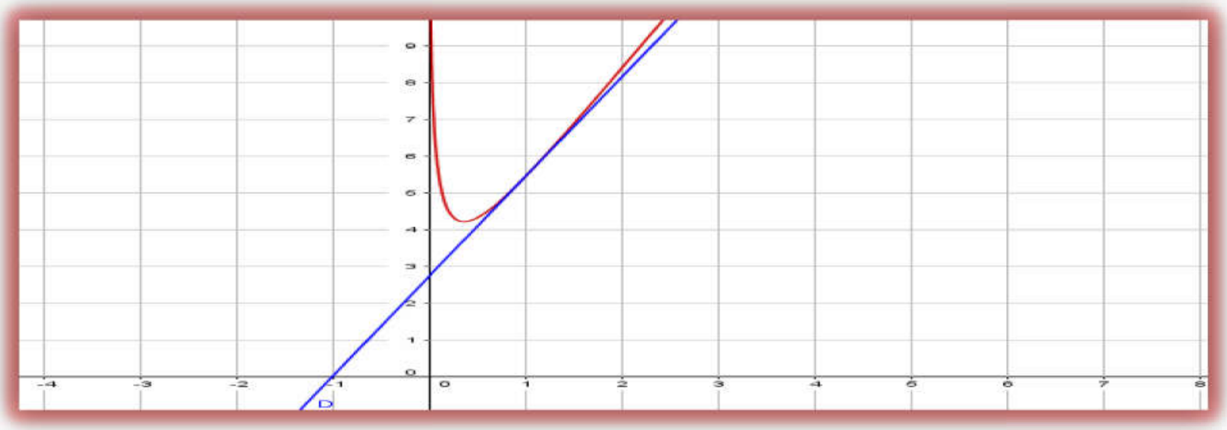
نهايةالدّالّة f بجوار $+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و نهاية الدّالّة f بجوار 0 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$

2) الدّالّة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ودالّتها المشتقّة $f'(x)=g(x)$ و بما ان فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$. وجدول تغيُّراتها هو

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3+2e}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) معادلة المماس (Δ) هي $y=ex+e$ لداسة الوضع النسبي ندرس اشارة $\frac{1}{2}(\ln)^2$ أي أن المنحنى (C_f) فوق المستقيم (Δ) من أجل كل $x>0$

4) أنشئ (C_f)



5) المناقشة بيانيًّا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x،

حيث $(\ln(x))^2 - 2x(m-e) = 0$ يكافئ $(\ln(x))^2 = 2x(m-e)$ يكافئ

$\frac{1}{2}(\ln(x))^2 = x(m-e)$ يكافئ $\frac{1}{2}(\ln(x))^2 + ex = xm$ يكافئ

$\frac{1}{2}(\ln(x))^2 + ex + e = xm + e$ ، يكافئ $f(x) = xm + e$ مناقشة دورانية هي

فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم المتحرك الدوراني ذو المعادلة $y = mx + e$

- $m < e$ تكافئ لاتوجد حلول
- $m = e$ حل مضاعف موجب .
- $m > e$ حل مضاعف موجب

بالتوفيق في شهادة البكالوريا 2019

زايدي علاء الدين

مجموعة الرياضيات الجزائرية